

Toets voor normaliteit van Shapiro en Wilk

door J. H. VAN FRANKENHUYSEN

Summary A description is given of a new test, introduced by SHAPIRO and WILK, for testing small samples on normality. Tables of the coefficients, used in determining the test statistic and probability points of the distribution function are included.

Met deze toets [1] kan een steekproef op normaliteit getoets worden. De toetsingsgrootheid is:

$$W_n = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_{in} x_{(i)} \right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (1)$$

Hierin zijn $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ de orderstatistics van $x_1, \dots, x_n$, stochastisch onafhankelijke waarnemingen van een grootheid x .

De wegingscoëfficiënten a_{in} , waarover later meer, zijn genormeerd en symmetrisch om nul:

$$\sum_{i=1}^n a_{in}^2 = 1 \quad (2)$$

$$-a_{i,n} = a_{n-i+1,n} \quad (3)$$

$$\text{met } a_{1n} < a_{2n} < \dots < a_{nn} \quad (4)$$

eigenschap (3.4).

Uit (3) volgt dat de teller van W_n invariant is onder verschuiving; ook de noemer is dit. Teller en noemer zijn bovendien homogeen van de tweede graad in $x_1, \dots, x_n$, zodat W_n invariant is onder lineaire transformaties van x .

Zij H_0 de samengestelde nulhypothese: de steekproef $x_1, \dots, x_n$ is getrokken uit een normale verdeling. Een toetsingsgrootheid voor het toetsen van H_0 moet de eigenschap hebben dat zijn verdeling onder H_0 onafhankelijk van μ en σ is, hetgeen juist neerkomt op invariantie onder lineaire transformaties. W_n bezit deze eigenschap en kan dus voor het toetsen van H_0 gebruikt worden.

Wegens (3) kunnen wij in de teller $x_{(i)}$ vervangen door $x_{(i)} - \bar{x}$. Uit (2) volgt dan met behulp van de ongelijkheid van Schwarz: $W_n \leq 1$. De verdeling van W_n is dus geconcentreerd op het interval $[0, 1]$. De kritieke zone is linkseenzijdig. Over de verdeling is weinig exact bekend. Men kan deze echter met Monte-Carlo-methoden benaderen.

Door SHAPIRO en WILK zijn voor $3 \leq n \leq 50$ en $1 \leq i \leq n$ de coëfficiënten a_{in} bepaald volgens een verderop uiteengezet principe, en enkele kritieke waarden (0,01, 0,02, 0,05, 0,10, 0,50, 0,90, 0,95, 0,98, 0,99) van deze verdeling.

Rapport S 397 van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum.

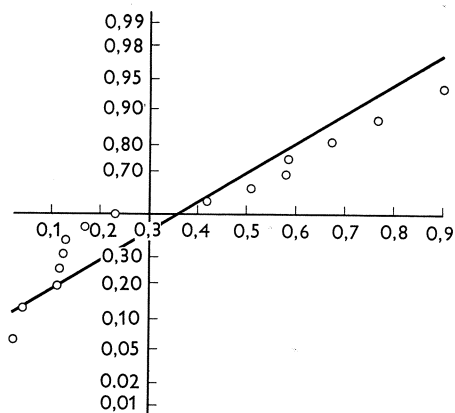


Fig. 1

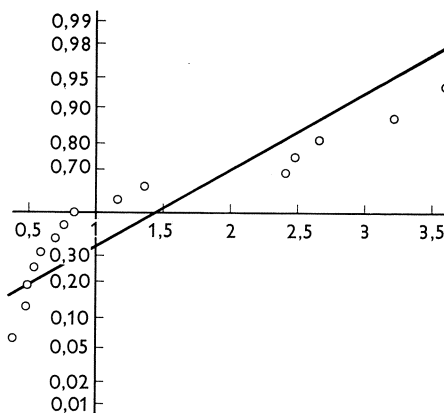


Fig. 2

Voor steekproeven groter dan 50 kan deze toets dus nog niet gebruikt worden. Voor $n \leq 50$ is hij echter zeer geschikt, daar gebleken is dat hij een goed onderscheidingsvermogen heeft in vergelijking met andere toetsen van dezelfde hypothese, vooral met betrekking tot scheefheid.

Numeriek voorbeeld

Ter illustratie geven wij twee voorbeelden. Beide steekproeven zijn van grootte 15. De eerste is getrokken uit de exponentiële verdeling met $\lambda = 1$, de tweede uit de standaard log normale verdeling. Beide zijn ook uitgezet op normaal waarschijnlijkheidspapier.

De eerste steekproef (exponentieel):

0,768	0,169	0,113	0,042	0,129	0,585	0,902	0,117	0,231
0,580	0,125	0,509	0,419	0,023	0,673			

De toetsingsgrootheid $W = 2,225/2,376 = 0,936$. Deze waarde ligt boven het 10% punt. De in figuur 1 uitgezette steekproef vertoont wel een zekere scheefheid, maar deze is niet significant.

De tweede steekproef (log normaal):

2,41	0,54	0,70	2,36	2,66	0,48	0,59	0,49
0,38	3,60	0,84	0,76	3,22	2,48	1,16	

De toetsingsgrootheid $W = 15,05/18,04 = 0,83$. De waarde ligt nog onder het 1% punt. Figuur 2 toont de grote scheefheid van de steekproef.

Wegingscoëfficiënten

De toets van SHAPIRO en WILK is gebaseerd op een aan de regressie-analyse ontleende gedachtegang. Het daarbij gebruikte model luidt:

$$x_{(i)} = \mu + \sigma b_{in} + e_{in} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5)$$

Hierin is b_{in} de verwachting van de i -de order statistic van een steekproef van grootte n uit een standaard normale verdeling. Onder H_0 geldt:

- $\mathcal{E} e_{in} = 0$,
- De covariantiematrix van $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ is $\sigma^2 V$, waarin V de covariantiematrix is van de order statistics uit de standaard normale verdeling.

De bij dit model behorende schatters voor μ en σ zijn die waarden, waarvoor de gegeneraliseerde kwadraatsom minimaal is. Voor μ krijgt men de gewone schatter $\bar{x}$, voor σ de beste zuivere lineaire schatter, die dus verschilt van de gebruikelijke schatter s . De kleinste kwadraatsom is een maat voor de aanpassing van het model aan de steekproef. Dit levert ons de toetsingsgrootheid. We voeren de notaties in:

$$B = (\mathbf{1} \ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & b_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{(1)} \\ \vdots \\ x_{(n)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_{1n} \\ \vdots \\ e_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dan is het model:

$$\mathbf{x} = B\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}, \quad (6)$$

en de beste lineaire schatter voor $\boldsymbol{\theta}$ is die vector $\underline{\boldsymbol{\theta}}^*$, waarvoor de gegeneraliseerde kleinste kwadratensom:

$$(\mathbf{x} - B\boldsymbol{\theta})' V^{-1} (\mathbf{x} - B\boldsymbol{\theta}) \quad (7)$$

minimaal is.

$\boldsymbol{\theta}^*$ is de oplossing van de normaal vergelijkingen:

$$B' V^{-1} B \underline{\boldsymbol{\theta}}^* = B' V^{-1} \mathbf{x},$$

waaruit voor $\underline{\boldsymbol{\theta}}^*$ volgt:

$$\underline{\boldsymbol{\theta}}^* = (B' V^{-1} B)^{-1} B' V^{-1} \mathbf{x}.$$

V en dus ook V^{-1} zijn symmetrisch om beide diagonalen en de componenten van $\mathbf{b}$ liggen symmetrisch om 0 (eigenschap (3.4)), zodat ook de componenten van $\mathbf{b}' V^{-1}$ en $V^{-1} \mathbf{b}$ eigenschap (3.4) bezitten. Bovendien is de som van de rijen van V en V^{-1} gelijk aan 1 [2]. Met behulp van deze eigenschappen kan men afleiden:

$$(B' V^{-1} B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{b}' V^{-1} \mathbf{b}} \end{pmatrix},$$

zodat

$$\underline{\theta}^* = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \frac{\mathbf{b}' V^{-1} \underline{x}}{\mathbf{b}' V^{-1} \mathbf{b}} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Invullen van $\underline{\theta}^*$ in (7) levert de gegeneraliseerde kleinste kwadraten som (GKKS) op:

$$GKKS = \underline{u}' V^{-1} \underline{u} - \frac{(\mathbf{b}' V^{-1} \underline{x})^2}{\mathbf{b}' V^{-1} \mathbf{b}}, \quad (9)$$

waarin

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_{(1)} \\ \vdots \\ u_{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{(1)} - \bar{x} \\ \vdots \\ x_{(n)} - \bar{x} \end{pmatrix}.$$

Deze grootheid is verschuivingsinvariant omdat $\mathbf{b}' V^{-1}$ eigenschap (3.4) bezit, maar nog wel variabel onder schaalvermenigvuldiging. Delen door $\underline{u}' V^{-1} \underline{u}$ levert de grootheid:

$$1 - \frac{(\mathbf{b}' V^{-1} \underline{x})^2}{\mathbf{b}' V^{-1} \mathbf{b}} \bigg/ \underline{u}' V^{-1} \underline{u},$$

die invariant is onder lineaire transformaties van $\underline{x}$, dus voor het toetsen van H_0 gebruikt kan worden. Deze grootheid neemt waarden aan in het interval $[0, 1]$ en de kritieke zone is rechtseenzijdig. Men kan natuurlijk ook bovenstaande grootheid van 1 aftrekken, dan wordt de kritieke zone linkseenzijdig.

De toetsingsgrootheid

De vraag naar de praktische toepasbaarheid van de grootheid

$$\frac{(\mathbf{b}' V^{-1} \underline{x})^2}{\mathbf{b}' V^{-1} \mathbf{b}} \bigg/ \underline{u}' V^{-1} \underline{u} \quad (10)$$

kan in een aantal punten gesplitst worden:

- Zijn de vector $\mathbf{b}$ en de matrix V of V^{-1} bekend?
- Is de verdeling van (10) bekend?
- Is de toetsingsgrootheid praktisch, d.w.z. niet te moeilijk uit te rekenen?
- Heeft de toets een voldoende groot onderscheidingsvermogen voor een reeks alternatieven?

ad d. Allereerst is het laatste punt van belang. Op grond van de duidelijke samenhang tussen de aanpassing van het model (5) aan de steekproef en de „normaliteit” van de steekproef, mag verwacht worden dat een toets gebaseerd op de gegeneraliseerde kleinste kwadraten som een goed onderscheidingsvermogen heeft.

Over de eerste drie punten kan het volgende gezegd worden:

ad a. $\mathbf{b}$ en V zijn (reeds eerder) langs numerieke weg bepaald voor $n \leq 20$, maar het is zeer veel werk om dit uit te breiden tot grotere n .

ad b. De verdeling is onbekend, maar zou met Monte-Carlo-methoden benaderd kunnen worden.

ad c. De vorm van de toetsingsgrootheid is ingewikkeld wanneer geen computer gebruikt wordt.

SHAPIRO en WILK stellen nu, om punt a. en c. te ondervangen, de volgende toetsingsgrootheid voor:

$$W_n = \frac{(c \cdot \mathbf{b}' V^{-1} \mathbf{x})^2}{\mathbf{u}' \mathbf{u}}, \quad (11)$$

waarin de constante c zó gekozen is, dat de vector $c \cdot \mathbf{b}' V^{-1}$ genormeerd is. De componenten van deze vector hebben nu de eigenschappen (2), (3) en (4).

Voor $n \leq 20$ kunnen de componenten van de vector $c \cdot \mathbf{b}' V^{-1}$ direct uit de bekende $\mathbf{b}$ en V bepaald worden. Voor grotere waarden van n tot $n = 50$ hebben SHAPIRO en WILK deze coëfficiënten a_{in} door extrapolatie bepaald, zodanig dat aan (2), (3) en (4) voldaan is. Men mag verwachten dat deze extrapolatie het onderscheidingsvermogen weinig zal schaden. De onbetrouwbaarheid wordt er niet door beïnvloed. De verdeling van de uiteindelijke toetsingsgrootheid:

$$W_n = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_{in} x_{(i)} \right)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

is niet analytisch afgeleid, maar werd door simuleren (Monte Carlo) benaderd.

Het onderscheidingsvermogen is door SHAPIRO en WILK onderzocht en beschreven in [1]. Zij vermelden in het bijzonder dat de toets gevoelig is voor uitschieters. Voor het reproduceren van de tabellen werd toestemming verkregen van de auteurs en van de uitgever.

Literatuur

- [1] S. S. SHAPIRO and M. B. WILK, An analysis of variance test for normality. *Biometrika* **52** (1965), pp. 591-611.
- [2] A. E. SARHAN and B. E. GREENBERG, (1962), Contributions to order statistics. Wiley Publications in statistics, pp. 25.

Tabel 1. Coëfficiënten $a_{n-i+1,n}$ voor de toets op normaliteit voor $n = 2(1)50$. Er geldt: $a_{i,n} = -a_{n-i+1,n}$.

i	$n = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0,7071	0,7071	0,6872	0,6646	0,6431	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739	
2	—	0,0000	0,1677	0,2413	0,2806	0,3031	0,3164	0,3244	0,3291	
3	—	—	—	0,0000	0,0875	0,1401	0,1743	0,1976	0,2141	
4	—	—	—	—	—	0,0000	0,0561	0,0947	0,1224	
5	—	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0399	
i	$n = 11$	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,5601	0,5475	0,5359	0,5251	0,5150	0,5056	0,4968	0,4886	0,4808	0,4734
2	0,3315	0,3325	0,3325	0,3318	0,3306	0,3290	0,3273	0,3253	0,3232	0,3211
3	0,2260	0,2347	0,2412	0,2460	0,2495	0,2521	0,2540	0,2553	0,2561	0,2565
4	0,1429	0,1586	0,1707	0,1802	0,1878	0,1939	0,1988	0,2027	0,2059	0,2085
5	0,0695	0,0922	0,1099	0,1240	0,1353	0,1447	0,1524	0,1587	0,1641	0,1686
6	0,0000	0,0303	0,0539	0,0727	0,0880	0,1005	0,1109	0,1197	0,1271	0,1334
7	—	—	0,0000	0,0240	0,0433	0,0593	0,0725	0,0837	0,0932	0,1013
8	—	—	—	—	0,0000	0,0196	0,0359	0,0496	0,0612	0,0711
9	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0163	0,0303	0,0422
10	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0140
i	$n = 21$	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0,4643	0,4590	0,4542	0,4493	0,4450	0,4407	0,4366	0,4328	0,4291	0,4254
2	0,3185	0,3156	0,3126	0,3098	0,3069	0,3043	0,3018	0,2992	0,2968	0,2944
3	0,2578	0,2571	0,2563	0,2554	0,2543	0,2533	0,2522	0,2510	0,2499	0,2487
4	0,2119	0,2131	0,2139	0,2145	0,2148	0,2151	0,2152	0,2151	0,2150	0,2148
5	0,1736	0,1764	0,1787	0,1807	0,1822	0,1836	0,1848	0,1857	0,1864	0,1870
6	0,1399	0,1443	0,1480	0,1512	0,1539	0,1563	0,1584	0,1601	0,1616	0,1630
7	0,1092	0,1150	0,1201	0,1245	0,1283	0,1316	0,1346	0,1372	0,1395	0,1415
8	0,0804	0,0878	0,0941	0,0997	0,1046	0,1089	0,1128	0,1162	0,1192	0,1219
9	0,0530	0,0618	0,0696	0,0764	0,0823	0,0876	0,0923	0,0965	0,1002	0,1036
10	0,0263	0,0368	0,0459	0,0539	0,0610	0,0672	0,0728	0,0778	0,0822	0,0862
11	0,0000	0,0122	0,0228	0,0321	0,0403	0,0476	0,0540	0,0598	0,0650	0,0697
12	—	—	0,0000	0,0107	0,0200	0,0284	0,0358	0,0424	0,0483	0,0537
13	—	—	—	—	0,0000	0,0094	0,0178	0,0253	0,0320	0,0381
14	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0084	0,0159	0,0227
15	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0076

Tabel 1. *vervolg*

<i>i</i>	<i>n</i> = 31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0,4220	0,4188	0,4156	0,4127	0,4096	0,4068	0,4040	0,4015	0,3989	0,3964
2	0,2921	0,2898	0,2876	0,2854	0,2834	0,2813	0,2794	0,2774	0,2755	0,2737
3	0,2475	0,2463	0,2451	0,2439	0,2427	0,2415	0,2403	0,2391	0,2380	0,2368
4	0,2145	0,2141	0,2137	0,2132	0,2127	0,2121	0,2116	0,2110	0,2104	0,2098
5	0,1874	0,1878	0,1880	0,1882	0,1883	0,1883	0,1883	0,1881	0,1880	0,1878
6	0,1641	0,1651	0,1660	0,1667	0,1673	0,1678	0,1683	0,1686	0,1689	0,1691
7	0,1433	0,1449	0,1463	0,1475	0,1487	0,1496	0,1505	0,1513	0,1520	0,1526
8	0,1243	0,1265	0,1284	0,1301	0,1317	0,1331	0,1344	0,1356	0,1366	0,1376
9	0,1066	0,1093	0,1118	0,1140	0,1160	0,1179	0,1196	0,1211	0,1225	0,1237
10	0,0899	0,0931	0,0961	0,0988	0,1013	0,1036	0,1056	0,1075	0,1092	0,1108
11	0,0739	0,0777	0,0812	0,0844	0,0873	0,0900	0,0924	0,0947	0,0967	0,0986
12	0,0585	0,0629	0,0669	0,0706	0,0739	0,0770	0,0798	0,0824	0,0848	0,0870
13	0,0435	0,0485	0,0530	0,0572	0,0610	0,0645	0,0677	0,0706	0,0733	0,0759
14	0,0289	0,0344	0,0395	0,0441	0,0484	0,0523	0,0559	0,0592	0,0622	0,0651
15	0,0144	0,0206	0,0262	0,0314	0,0361	0,0404	0,0444	0,0481	0,0515	0,0546
16	0,0000	0,0068	0,0131	0,0187	0,0239	0,0287	0,0331	0,0372	0,0409	0,0444
17	—	—	0,0000	0,0062	0,0119	0,0172	0,0220	0,0264	0,0305	0,0343
18	—	—	—	—	0,0000	0,0057	0,0110	0,0158	0,0203	0,0244
19	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0053	0,0101	0,0146
20	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0049
<i>i</i>	<i>n</i> = 41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0,3940	0,3917	0,3894	0,3872	0,3850	0,3830	0,3808	0,3789	0,3770	0,3751
2	0,2719	0,2701	0,2684	0,2667	0,2651	0,2635	0,2620	0,2604	0,2589	0,2574
3	0,2357	0,2345	0,2334	0,2323	0,2313	0,2302	0,2291	0,2281	0,2271	0,2260
4	0,2091	0,2085	0,2078	0,2072	0,2065	0,2058	0,2052	0,2045	0,2038	0,2032
5	0,1876	0,1874	0,1871	0,1868	0,1865	0,1862	0,1859	0,1855	0,1851	0,1847
6	0,1693	0,1694	0,1695	0,1695	0,1695	0,1695	0,1695	0,1693	0,1692	0,1691
7	0,1531	0,1535	0,1539	0,1542	0,1545	0,1548	0,1550	0,1551	0,1553	0,1554
8	0,1384	0,1392	0,1398	0,1405	0,1410	0,1415	0,1420	0,1423	0,1427	0,1430
9	0,1249	0,1259	0,1269	0,1278	0,1286	0,1293	0,1300	0,1306	0,1312	0,1317
10	0,1123	0,1136	0,1149	0,1160	0,1170	0,1180	0,1189	0,1197	0,1205	0,1212
11	0,1004	0,1020	0,1035	0,1049	0,1062	0,1073	0,1085	0,1095	0,1105	0,1113
12	0,0891	0,0909	0,0927	0,0943	0,0959	0,0972	0,0986	0,0998	0,1010	0,1020
13	0,0782	0,0804	0,0824	0,0842	0,0860	0,0876	0,0892	0,0906	0,0919	0,0932
14	0,0677	0,0701	0,0724	0,0745	0,0765	0,0783	0,0801	0,0817	0,0832	0,0846
15	0,0575	0,0602	0,0628	0,0651	0,0673	0,0694	0,0713	0,0731	0,0748	0,0764
16	0,0476	0,0506	0,0534	0,0560	0,0584	0,0607	0,0628	0,0648	0,0667	0,0685
17	0,0379	0,0411	0,0442	0,0471	0,0497	0,0522	0,0546	0,0568	0,0588	0,0608
18	0,0283	0,0318	0,0352	0,0383	0,0412	0,0439	0,0465	0,0489	0,0511	0,0532
19	0,0188	0,0227	0,0263	0,0296	0,0328	0,0357	0,0385	0,0411	0,0436	0,0459
20	0,0094	0,0136	0,0175	0,0211	0,0245	0,0277	0,0307	0,0335	0,0361	0,0386
21	0,0000	0,0045	0,0087	0,0126	0,0163	0,0197	0,0229	0,0259	0,0288	0,0314
22	—	—	0,0000	0,0042	0,0081	0,0118	0,0153	0,0185	0,0215	0,0244
23	—	—	—	—	0,0000	0,0039	0,0076	0,0111	0,0143	0,0174
24	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0037	0,0071	0,0104
25	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0000	0,0035

Tabel 2. Kritieke waarden van $\bar{W}_n$ voor $n = 3(1)50$.
De kritieke zone is linkseenzijdig.

n	Niveau								
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,98	0,99
3	0,753	0,756	0,767	0,789	0,959	0,998	0,999	1,000	1,000
4	0,687	0,707	0,748	0,792	0,935	0,987	0,992	0,996	0,997
5	0,686	0,715	0,762	0,806	0,927	0,979	0,986	0,991	0,993
6	0,713	0,743	0,788	0,826	0,927	0,974	0,981	0,986	0,989
7	0,730	0,760	0,803	0,838	0,928	0,972	0,979	0,985	0,988
8	0,749	0,778	0,818	0,851	0,932	0,972	0,978	0,984	0,987
9	0,764	0,791	0,829	0,859	0,935	0,972	0,978	0,984	0,986
10	0,781	0,806	0,842	0,869	0,938	0,972	0,978	0,983	0,986
11	0,792	0,817	0,850	0,876	0,940	0,973	0,979	0,984	0,986
12	0,805	0,828	0,859	0,883	0,943	0,973	0,979	0,984	0,986
13	0,814	0,837	0,866	0,889	0,945	0,974	0,979	0,984	0,986
14	0,825	0,846	0,874	0,895	0,947	0,975	0,980	0,984	0,986
15	0,835	0,855	0,881	0,901	0,950	0,975	0,980	0,984	0,987
16	0,844	0,863	0,887	0,906	0,952	0,976	0,981	0,985	0,987
17	0,851	0,869	0,892	0,910	0,954	0,977	0,981	0,985	0,987
18	0,858	0,874	0,897	0,914	0,956	0,978	0,982	0,986	0,988
19	0,863	0,879	0,901	0,917	0,957	0,978	0,982	0,986	0,988
20	0,868	0,884	0,905	0,920	0,959	0,979	0,983	0,986	0,988
21	0,873	0,888	0,908	0,923	0,960	0,980	0,983	0,987	0,989
22	0,878	0,892	0,911	0,926	0,961	0,980	0,984	0,987	0,989
23	0,881	0,895	0,914	0,928	0,962	0,981	0,984	0,987	0,989
24	0,884	0,898	0,916	0,930	0,963	0,981	0,984	0,987	0,989
25	0,888	0,901	0,918	0,931	0,964	0,981	0,985	0,988	0,989
26	0,891	0,904	0,920	0,933	0,965	0,982	0,985	0,988	0,989
27	0,894	0,906	0,923	0,935	0,965	0,982	0,985	0,988	0,990
28	0,896	0,908	0,924	0,936	0,966	0,982	0,985	0,988	0,990
29	0,898	0,910	0,926	0,937	0,966	0,982	0,985	0,988	0,990
30	0,900	0,912	0,927	0,939	0,967	0,983	0,985	0,988	0,990
31	0,902	0,914	0,929	0,940	0,967	0,983	0,986	0,988	0,990
32	0,904	0,915	0,930	0,941	0,968	0,983	0,986	0,988	0,990
33	0,906	0,917	0,931	0,942	0,968	0,983	0,986	0,989	0,990
34	0,908	0,919	0,933	0,943	0,969	0,983	0,986	0,989	0,990
35	0,910	0,920	0,934	0,944	0,969	0,984	0,986	0,989	0,990
36	0,912	0,922	0,935	0,945	0,970	0,984	0,986	0,989	0,990
37	0,914	0,924	0,936	0,946	0,970	0,984	0,987	0,989	0,990
38	0,916	0,925	0,938	0,947	0,971	0,984	0,987	0,989	0,990
39	0,917	0,927	0,939	0,948	0,971	0,984	0,987	0,989	0,991
40	0,919	0,928	0,940	0,949	0,972	0,985	0,987	0,989	0,991
41	0,920	0,929	0,941	0,950	0,972	0,985	0,987	0,989	0,991
42	0,922	0,930	0,942	0,951	0,972	0,985	0,987	0,989	0,991
43	0,923	0,932	0,943	0,951	0,973	0,985	0,987	0,990	0,991
44	0,924	0,933	0,944	0,952	0,973	0,985	0,987	0,990	0,991
45	0,926	0,934	0,945	0,953	0,973	0,985	0,988	0,990	0,991
46	0,927	0,935	0,945	0,953	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991
47	0,928	0,936	0,946	0,954	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991
48	0,929	0,937	0,947	0,954	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991
49	0,929	0,937	0,947	0,955	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991
50	0,930	0,938	0,947	0,955	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991